

Московский Институт открытого образования
Средняя школа №179 МИОО

Разработано и согласовано
Председатель МОМИ школы
№179 МИОО

/Константинов Н.Н./

Учебные программы по предметам
“Алгебра” и “Математический анализ”
для классов с углубленным изучением математики

Составители: Н. Н. Константинов, Д. П. Кириенко,
С. И. Комаров, С. А. Дориченко, Ю. В. Титов

Москва, 2003 г.

Пояснительная записка

Цели и задачи обучения

Основная задача обучения математике в школе заключается в обеспечении прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Наряду с решением основной задачи углубленное профильное изучение математики предусматривает формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие их математических способностей, ориентацию на профессии, существенно связанные с математикой, подготовку к обучению в вузе.

При этом начальный этап (9 класс) углубленного изучения математики является в значительной степени ориентационным. На этом этапе ученику надо помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможность овладения им. Интерес и склонность учащегося к математике должен всемерно подкрепляться и развиваться.

Последующее углубленное профильное изучение математики в старшей школе должно обеспечить подготовку учащихся к поступлению в вуз и продолжению образования, а также к профессиональной деятельности, требующей достаточно высокой математической культуры.

Данная программа составлена для IX–XI классов с углубленным профильным изучением математики в средней школе №179 МИОО и учитывает сформулированные выше цели и задачи. В основу данной программы положена программа для школ (классов) с углубленным изучением математики составленная Г. М. Кузнецовой и Н. Г. Миндюк (далее — оригинальная программа) (Программы для общеобразовательных школ, гимназий лицеев. Математика, 5–11 классы. Программы. Тематическое планирование. Рекомендовано департаментом общего среднего образования Министерства образования Российской Федерации. М.: “Дрофа”, 2000).

Учебно–методическое обеспечение

Тематическое планирование построено на основе следующих учебников, входящих в Федеральный перечень:

1. Н. Я. Виленкин. и др. Алгебра, 8 класс. М.: “Просвещение”, 2001.
2. Н. Я. Виленкин. и др. Алгебра, 9 класс. М.: “Просвещение”, 2001.
3. Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев–Мусатов, С. И. Шварцбург. Алгебра и математический анализ, 10 класс; Алгебра и математический анализ, 11 класс. М.: “Мнемозина”, 2000.

В средней школе №179 МИОО углубленное профильное изучение математики проводится в 9–11 классах. В каждом классе на курс алгебры отводится 2 часа в неделю (68 часов в год), на курс математического анализа отводится 4 часа в неделю (136 часов в год). Поэтому оригинальная программа по алгебре и математическому анализу была разделена между этими двумя предметами. К курсу алгебры отнесены темы, касающиеся многочленов, решения уравнений и неравенств и тригонометрия. В курс математического анализа вошли темы, относящиеся к действительным числам, функциям действительного переменного, дифференцированию и интегрированию.

При этом оригинальная программа расширена за счет большего суммарного количества часов, отводимого на изучение алгебры и математического анализа. В программу IX–X классов добавлен ряд небольших по объему часов тем, таких как “Делимость целых чисел”, “Математическая логика”, “Теория множеств”, “Неравенства и оценки”. Изучение данных тем ставит целью развитие математического кругозора у учащихся и развитие интереса к изучению математики.

Для достижения сформулированных целей в программе для X–XI классов основное внимание уделено построению строгого и аксиоматически максимально полного курса математического анализа и его приложений. При этом сокращена тема “Теория вероятностей” и исключены все вопросы, касающиеся математической статистики, которые, по мнению авторов данной программы, не являются фундаментальными в математическом образовании школьников.

Содержание каждой темы разделено на три уровня.

Базовый общеобразовательный уровень соответствует требованиям к математической подготовке учащихся общеобразовательной средней школы.

К *углубленному уровню* отнесены блоки программы, которые должен усвоить учащийся.

К *дополнительному уровню* отнесены блоки, изучение которых рекомендуется для учащихся, хорошо усвоивших обязательный уровень программы, за счет резерва времени.

Алгебра, IX класс

В курс алгебры для 9 класса вошли четыре темы оригинальной программы (“Квадратный трехчлен”, “Уравнения и системы уравнений”, “Неравенства с двумя переменными и их системы” и “Элементы тригонометрии”). При этом количество часов, отводимых на изучение каждой темы сокращено, поскольку все эти темы получают дальнейшее развитие в старшей школе и тематическое планирование для старшей школы в оригинальной программе пересекается с тематическим планированием в 9 классе. Тема “Элементы тригонометрии” сокращена на 6 часов за счет исключения из нее вопросов, связанных с построением графиков тригонометрических функций, которые рассматриваются в 10 классе.

Квадратный трехчлен (18 часов)

Базовый уровень. Квадратный трехчлен и его корни. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на множители.

Углубленный уровень. Деление многочленов с остатком. Делимость многочленов. Теорема Безу и ее следствия.

Базовый уровень. Квадратичная функция, ее свойства и график. Решение неравенств второй степени.

Углубленный уровень. Рациональные неравенства и их решение методом интервалов.

Уравнения и системы уравнений (18 часов)

Углубленный уровень. Целое уравнение и его степень. Биквадратное уравнение. Решение уравнений третьей и четвертой степени при помощи разложения на множители. Нахождение рациональных корней многочленов. Специальные приемы решения целых уравнений.

Уравнения с двумя переменными. Решение уравнений с двумя переменными в целых числах.

Системы уравнений. Равносильность. Уравнение–следствие. Приемы решения систем: подстановка, алгебраическое сложение, введение вспомогательной переменной. Решение систем уравнений.

Решение текстовых задач на составление уравнений и систем уравнений.

Неравенства с двумя переменными и их системы (4 часа)

Углубленный уровень. Неравенства с двумя переменными. Геометрическая интерпретация решения неравенства с двумя переменными.

Система неравенств с двумя переменными. Геометрическая интерпретация решения системы неравенств с двумя переменными.

Элементы тригонометрии (20 часов)

Базовый уровень. Измерение углов. Радиан. Радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения.

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов. Тригонометрические функции двойного угла. Формулы половинного угла. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведение в сумму. Формулы понижения степени. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Резерв времени (8 часов)

Математический анализ, IX класс

Из семи тем, вошедших в оригинальную программу по алгебре для 9 класса, три темы в данной программе отнесены к курсу математического анализа (“Функции, их свойства и графики”, “Последовательности”, “Степень с рациональным показателем”). Кроме того, в курс математического анализа включены три темы из курса оригинальной программы для 8 класса (“Множества и операции над ними”, “Делимость целых чисел”, “Действительные числа”). Эти темы как правило не рассматриваются в 8 классе общеобразовательной школы, тем не менее эти темы важны для построения полного курса математического анализа. Также в курс математического анализа включены такие темы, как “Комбинаторика и начала теории вероятностей”, “Математическая логика”. Изучение данных тем представляется авторам программы важным для развития математической культуры учащихся.

Делимость целых чисел (12 часов)

Базовый уровень. Делимость целых чисел. Деление с остатком. Десятичная запись числа. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10.

Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители.

Общие делители. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное.

Углубленный уровень. Признак делимости на 11.

Алгоритм Евклида. Основная теорема арифметики.

Комбинаторика и начала теории вероятностей (16 часов)

Углубленный уровень. Правило суммы и правило произведения. Основные способы подсчета в задачах пересчетной комбинаторики. Размещения, сочетания и перестановки (с возвращением и без возвращения). Треугольник Паскаля. Бином Ньютона.

Случайные события. Классическое определение вероятности. Вычисление вероятностей при помощи комбинаторных формул. Сложение и умножение вероятностей. Условная вероятность. Бесконечные вероятностные пространства на примере выбора точки на плоскости.

Математическая логика (12 часов)

Углубленный уровень. Логические утверждения. Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание утверждений. Квантор всеобщности и квантор существования. Построение отрицаний. Логические парадоксы.

Множества и операции над ними (10 часов)

Углубленный уровень. Множество. Элемент множества. Пустое множество. Пересечение и объединение множеств. Подмножество. Конечные и бесконечные множества. Число элементов объединения и пересечения двух конечных множеств. Числовые промежутки.

Принцип Дирихле.

Действительные числа (14 часов)

Базовый уровень. Натуральные, целые, рациональные числа и их свойства.

Углубленный уровень. Разрешимость уравнений в множествах натуральных, целых, рациональных чисел.

Базовый уровень. Представление рациональных чисел в виде несократимой дроби и в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Углубленный уровень. Выполнимость арифметических операций во множестве рациональных чисел и свойства этих операций.

Базовый уровень. Измерение отрезков: единичный отрезок, процесс измерения. Бесконечная десятичная дробь, как результат измерения отрезка. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Взаимно однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством действительных чисел. Примеры непериодических десятичных дробей. Иррациональные числа.

Углубленный уровень. Неразрешимость уравнения $x^2 = 2$ в множестве рациональных чисел.

Базовый уровень. Десятичные приближения действительных чисел с избытком и недостатком. Округление действительных чисел. Представления об арифметических действиях над действительными числами.

Функции, их свойства и графики (18 часов)

Базовый уровень. Свойства функций: четность и нечетность, возрастание и убывание, нули и промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значение. Элементарное исследование функций. Отображение свойств функций на графике.

Углубленный уровень. Преобразования графиков функций: сдвиги, растяжения, симметрия относительно осей координат и относительно прямой $y = x$. Построение графиков кусочно-заданных функций. Построение графиков функций, связанных с модулем. Примеры построения графиков рациональных функций.

Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$ и их графики.

Последовательности (20 часов)

Углубленный уровень. Числовые последовательности. Способы задания числовых последовательностей. Формула n -го члена. Рекуррентная формула. Числа Фибоначчи. Монотонные последовательности.

Базовый уровень. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n -го члена и суммы первых n членов.

Углубленный уровень. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Метод математической индукции. Применение метода математической индукции при решении задач.

Степень с рациональным показателем (25 часов)

Базовый уровень. Степень с целым показателем и ее свойства. Корень n -й степени. Арифметический корень n -й степени. Свойства арифметических корней.

Степень с дробным показателем и ее свойства.

Тождественные преобразования выражений с радикалами и степенями с дробными показателями.

Функции $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики.

Углубленный уровень. Решение иррациональных уравнений и неравенств.

Резерв времени (9 часов)

Алгебра, X класс

В курс алгебры для 10 класса вошли три темы оригинального курса (“Многочлены”, “Графики функций” и “Тригонометрические функции”).

Значительно сокращена тема “Многочлены” за счет рассмотрения разделов “Деление многочленов с остатком”, “Делимость многочленов” и “Теорема Безу” в 9 классе, а разделов, связанных с многочленами от нескольких переменных — в 11 классе.

Также сокращена тема “Тригонометрические функции” с 40 до 30 часов, поскольку многие элементы содержания по данной теме включены в тему “Элементы тригонометрии” (9 класс). Вопросы, касающиеся производных тригонометрических функций, перенесены в курс математического анализа.

Многочлены от одной переменной (10 часов)

Углубленный уровень. Алгоритм Евклида для многочленов. Схема Горнера. Обобщенная теорема Виета.

Графики функций (20 часов)

Углубленный уровень. Сложная функция. Построение графиков функций элементарными методами. Преобразования графиков. Графики дробно–линейных функций, вертикальная и горизонтальные асимптоты. Графики функций, связанных с модулем.

Взаимно обратные функции и их графики.

Условие существования обратной функции.

Дополнительный уровень. Неявное задание функций. Графики дробно–рациональных функций.

Тригонометрические функции (30 часов)

Базовый уровень. Графики тригонометрических функций, их периодичность.

Углубленный уровень. Нахождение периода сложных тригонометрических функций, суммы, произведения, частного тригонометрических функций.

Базовый уровень. Обратные тригонометрические функции.

Углубленный уровень. Свойства и графики обратных тригонометрических функций. Преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Базовый уровень. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

Углубленный уровень. Различные виды тригонометрических уравнений и неравенств и методы их решения.

Резерв времени (8 часов)

Математический анализ, X класс

В курс математического анализа для 10 класса включены темы “Теория множеств”, “Числовые множества”, “Неравенства и оценки”, не входящие в оригинальную программу. Из оригинальной программы взята тема “Введение в анализ”, которая разбита на две темы “Пределы последовательностей” и “Пределы и непрерывность функций”, при этом увеличено число часов, отводимых на изучение этих тем, поскольку на начальном этапе изучения математического анализа чрезвычайно важно развитие у учащихся навыков строгого доказательства теорем и решения задач математического анализа. Также в курс математического анализа включена тема “Производная и ее применения” из оригинальной программы.

Теория множеств (12 часов)

Углубленный уровень. Взаимно–однозначные отображения множеств. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Несчетные множества. Несчетность отрезка.

Дополнительный уровень. Понятие мощности множества. Сравнение мощностей множеств. Теорема Кантора–Бернштейна.

Числовые множества (10 часов)

Углубленный уровень. Ограниченные и неограниченные множества. Минимальные и максимальные элементы множеств. Верхние и нижние грани, точные верхние и нижние грани. Открытые и замкнутые множества.

Неравенства и оценки (12 часов)

Углубленный уровень. Неравенства с модулем. Доказательство неравенств методом математической индукции. Неравенство Бернулли. Сравнение роста многочлена и экспоненциальной функции (с натуральным показателем).

Пределы последовательностей (16 часов)

Углубленный уровень. Числовые последовательности. Рекуррентные соотношения. Предел числовой последовательности. Теоремы о пределах последовательностей. Единственность предела. Вычисление пределов. Ограниченность сходящейся последовательности.

Дополнительный уровень. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Пределы и непрерывность функций (20 часов)

Предел функции

Углубленный уровень. Предел функции на бесконечности и его свойства. Окрестность точки. Предел функции в точке по Коши. Предел функции в точке по Гейне. Теоремы о пределах функций. Вычисление пределов. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Дополнительный уровень. Односторонние пределы. Бесконечные пределы.

Непрерывность функции

Углубленный уровень. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Примеры непрерывных и разрывных функций. Свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Теорема о промежуточном значении функции, непрерывной на отрезке.

Дополнительный уровень. Непрерывность сложной и обратной функции.

Производная и ее применение (52 часа)

Производная функции

Базовый уровень. Приращение функции. Производная. Геометрический и механический смысл производной.

Углубленный уровень. Связь непрерывности и дифференцируемости функций.

Базовый уровень. Производные суммы, произведения и частного. Производные элементарных функций.

Углубленный уровень. Производные сложной и обратной функций. Вычисление производных.

Вторая производная, ее механический смысл. Производные высших порядков.

Приложение производной к исследованию графиков

Базовый уровень. Приложения производной к исследованию функций. Теорема Лагранжа и ее следствия. Построение графиков функций. Исследование функций на возрастание и убывание. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Углубленный уровень. Выпуклость. Точки перегиба. Асимптоты. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке.

Приложение производной к доказательству неравенств

Дополнительный уровень. Приложение производных к доказательству неравенств. Неравенство Йенсена и следствия из него.

Резерв времени (14 часов)

Алгебра, XI класс

В курсе алгебры для 11 класса включены тема “Многочлены от нескольких переменных” (из оригинальной программы для 10 класса) и тема “Уравнения, неравенства, системы”.

Тема “Элементы комбинаторики” и часть темы “Элементы теории вероятностей и математической статистики” перенесена в курс математического анализа для 9 класса, при этом блок, связанный с вопросами математической статистики, удален из программы, поскольку содержание данного блока носит узкоспециальный, а не фундаментальный характер.

Большой резерв времени на повторение курса алгебры за 9–11 классы необходим для достижения высоких результатов по автоматизации навыков работы с алгебраическими выражениями, решения уравнения, неравенств и их систем и дополнительного закрепления знаний по предмету.

Многочлены нескольких переменных (8 часов)

Углубленный уровень. Многочлены нескольких переменных. Формулы сокращенного умножения: $(x_1 + \dots + x_n)^2$, $x^n \pm y^n$. Симметрические многочлены. Основные симметрические многочлены.

Уравнения, неравенства, системы (30 часов)

Уравнения

Базовый уровень. Уравнение. Область допустимых значений неизвестной переменной. Равносильные уравнения. Уравнение–следствие. Общие методы решения уравнений: переход к равносильному уравнению, переход к уравнению–следствию и проверка корней.

Методы решения уравнений: разложение на множители, замена переменной, возведение в степень.

Углубленный уровень. Применение графиков при решении уравнений. Иррациональные уравнения.

Неравенства

Углубленный уровень. Обобщенный метод интервалов для решения неравенств.

Дополнительный уровень. Решение иррациональных неравенств.

Системы уравнений и неравенств

Углубленный уровень. Системы уравнений и неравенств. Основные методы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, замена переменных. Решение неравенств с двумя переменными. Применение графиков при решении систем уравнений и неравенств.

Уравнения и неравенства с параметром

Углубленный уровень. Уравнения, неравенства и системы с параметром. Методы решения.

Повторение и резерв времени (30 часов)

Математический анализ, XI класс

В курс математического анализа вошли темы “Показательная и логарифмическая функция” и “Комплексные числа”. Тема “Интеграл. Дифференциальные уравнения” разбита на две темы с соответствующим увеличением количества часов.

Большой резерв времени на повторение курса математического анализа за 9–11 классы необходим для достижения высоких результатов по автоматизации навыков анализа свойств функций и построения их графиков и дополнительного закрепления знаний по предмету.

Интеграл (30 часов)

Неопределенный интеграл

Базовый уровень. Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл. Таблица первообразных элементарных функций.

Углубленный уровень. Правила нахождения первообразных. Замена переменных в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

Определенный интеграл

Базовый уровень. Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл и его свойства.

Углубленный уровень. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменных в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Приложение интеграла

Углубленный уровень. Приложение интеграла. Вычисление площадей и объемов геометрических фигур. Использование интеграла в физических задачах.

Дополнительный уровень. Вычисление длин дуг.

Показательная и логарифмическая функции (40 часов)

Базовый уровень. Показательная функция, ее свойства и график. Определение и свойства логарифмов. Основное логарифмическое тождество.

Углубленный уровень. Формула перехода от одного основания к другому. Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений.

Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и системы. Основные их виды и методы решения.

Производная и первообразная показательной функции. Число e . Натуральные логарифмы. Производная логарифмической функции.

Радиоактивный распад и другие аналогичные явления в физике, экономике, экологии.

Дифференциальные уравнения (10 часов)

Углубленный уровень. Дифференциальные уравнения. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Решение простейших дифференциальных уравнений.

Дополнительный уровень. Уравнения с разделяющимися переменными. Поле направлений. Метод Эйлера численного решения дифференциальных уравнений.

Комплексные числа (20 часов)

Углубленный уровень. Развитие понятия числа: натуральные, целые, рациональные, действительные числа. Неразрешимость уравнения $x^2 = a$ в действительных числах.

Комплексные числа в алгебраической форме. Арифметические действия с комплексными числами. Сопряженные комплексные числа.

Решение квадратных уравнений в комплексных числах. Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами.

Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.

Дополнительный уровень. Применение комплексных чисел в тригонометрии. Комплексные корни многочлена. Основная теорема алгебры. Показательная форма комплексного числа. Показательная и логарифмическая функция комплексного числа.

Повторение и резерв времени (36 часов)